De la théorie des proportions
à la théorie des nombres réels

par Eliane Cousquer, Laboratoire LAMIA [1]

Table des matières

---

[1] http ://www.lille.iufm.fr/labo/entreelabo2.html

Cet article reproduit pour l'essentiel un article de 1995.

1 Un problème d'enseignement

1.1 Qu'est ce qu'un nombre réel ?

Demandons nous à quel moment un élève trouve la réponse à la question : « Qu'est ce qu'un nombre réel ?». À l'école primaire, il découvre les entiers, les décimaux et les fractions. Au collège, il découvre les nombres relatifs, et la calculatrice devient le recours constant dès qu'il s'agit d'activités numériques, au point de lui faire parfois oublier ses connaissances antérieures : est-ce que $13/7$ est un nombre pour un élève de collège, ou n'est-ce que le signe d'un calcul à effectuer sur la calculatrice, calcul qui donne le nombre $1,8571429$? Après avoir vu des étudiants de Capes de mathématiques utiliser leur calculatrice pour répondre oui à la question :« est-ce que $13/7$ est un décimal ?», je ne doute pas de la réponse à la question précédente.

Il faut dire que les programmes eux-mêmes sont tout à fait contestables. Lors de sa première apparition, le nombre $\sqrt{2}$ est présenté comme ce qu'on obtient en appuyant sur de touches 2 et $\sqrt{}$ de la calculette. Ce qui explique parfaitement ensuite la démarche d'élèves, qui voulant utiliser la réciproque du théorème de Pythagore, vérifient sur leurs calculettes que le carré de l'hypoténuse est à peu près égal à la somme des carrés des cotés.

La définition des nombres réels, la question de l'irrationalité de nombres est un non-dit qui traverse tout l'enseignement secondaire. Autrefois, dès la première année de l'université, les nombres réels étaient construits, soit par la méthode des coupures de Dedekind, soit par les suites de Cauchy selon la méthode de Cantor. Ensuite les propriétés des nombres réels étaient démontrées et tous les calculs avec les radicaux justifiés. Aujourd'hui ces questions ont été abandonnées comme trop difficiles pour les étudiants de premier cycle de l'université, et la construction des nombres réels n'est plus faite nulle part. De sorte que la critique que Lebesgue adressait vers 1910 à l'enseignement secondaire dans son livre « La mesure des grandeurs » (p 18), est valable pour tout le cursus secondaire et universitaire.

1.2 Le point de vue de Lebesgue

« ...Ma principale critique porte sur ce qu'on dit, ou plutôt sur ce qu'on ne dit pas au sujet des nombres irrationnels.

Dans les plus hautes classes de l'enseignement secondaire, comme dans la plus basse, on ne parle des nombres irrationnels que par prétérition. On reprend ce qui est déjà clair dans l'esprit pour enseigner aux élèves à le formuler en mots ; on n'essaie pas de leur préciser ce qui est resté plus que vague, bien que ce soit ce qui leur a le plus servi depuis quatre années et dont, cependant, on ne leur a jamais parlé : le nombre rationnel ou irrationnel. On le rencontre partout ; partout on évite d'en parler nettement. En arithmétique, à l'occasion de la mesure des grandeurs on reprend la comparaison des longueurs, mais on ne s'étend que sur les cas de commensurabilité. Les autres, on les escamote avec plus ou moins d'habileté. On se livre aussi à un véritable tour de passe-passe à l'occasion des valeurs approchées. On ne peut parler que des valeurs approchées des nombres rationnels, puisque c'est des nombres rationnels seuls que l'on a parlé ; or, pour eux, ces valeurs approchées sont infiniment moins intéressantes que pour les autres nombres. Mais ceux-ci n'existent pas en quelque sorte ; ***c'est bien simple, on va parler de valeurs approchées qui ne seront approchées de rien.***»

La question de l'irrationalité et de la définition des nombres réels est donc au coeur de la critique de Lebesgue, critique qui est toujours d'actualité : on peut se demander quel sens ont des développements savants en analyse, si cette question est escamotée comme actuellement.

1.3 Ma pratique d'enseignement

Dans mon enseignement, j'ai pu constater que des étudiants de maîtrise butaient sur des questions simples sur les nombres, mais aussi que les constructions des nombres réels les intéressaient vivement et leur apportait un éclairage important sur leur futur enseignement. Leurs difficultés m'ont amené à réfléchir sur l'ensemble du cursus d'enseignement sur les nombres et à constater son incohérence. Ma conviction est que depuis la dernière grande réforme des mathématiques, dite réforme des mathématiques modernes, il a été procédé pour les programmes des collèges et lycées, à des ajustements locaux successifs, allègements par-ci, modifications par-là et que l'ensemble n'a pas été discuté. Dans l'enseignement supérieur, nous nous sommes adaptés de la même façon à l'arrivée des nouveaux étudiants. Certaines questions sont supposés connues à un moment donné, sans avoir jamais été enseignées. Les exemples les plus frappants à Lille concernent les nombres réels, les structures quotients, et l'intégrale de Riemann parfois escamotée en première année, et *définie* par les étudiants de maîtrise comme *un cas particulier de l'intégrale de Lebesgue*. En première année le corps des nombres réels est introduit de façon axiomatique, à l'aide par exemple de l'axiome de la borne supérieure ou de tout autre axiome équivalent. Il n'y a rien à reprocher sur le plan de la rigueur formelle. On peut toutefois se demander si cette méthode est satisfaisante et éclairante pour les étudiants. Mais, après tout, on pourrait aussi envisager qu'avec la pratique numérique acquise par les étudiants avec leurs calculatrices, ces constructions et justifications des nombres réels soient devenues superflues.

Nous allons suivre au cours de l'histoire cette question de l'irrationalité et des nombres réels, afin de comprendre l'élaboration du concept de nombre réel et éclairer par cette histoire notre questionnement. La difficulté que nous allons rencontrer est la suivante : suite à la découverte de l'irrationalité, pour faire des démonstrations rigoureuses concernant ce que nous appelons maintenant la mesure des grandeurs, les grecs ont élaboré une théorie entièrement géométrique appelée théorie des proportions, qui utilise des rapports géométriques de grandeurs. Reconnaitre que ces rapports sont des nombres, est un processus qui a duré deux mille ans. En quoi ceci peut-il nous intéresser directement pour l'enseignement ? Un élève ou un étudiant ne peut avec sa calculette qu'approcher certaines quantités. Est-il si évident pour lui que ce sont des nombres ? Bien sûr, les enseignants le disent, mais est-ce donc si évident quand on voit les difficultés que cette question a posé aux mathématiciens des siècles passés ?

2 La découverte de l'irrationalité

Les nombres sont issus de deux activités, le dénombrement et la mesure. Ce qui a posé dans la civilisation grecque le problème du discret et du continu. Les autres civilisations antiques, bien qu'elles aient développé des mathématiques comportant de nombreux résultats géométriques et numériques, n'ont pas laissé de traces écrites de réflexions sur ce thème.

2.1 Les civilisations antiques

La civilisation babylonienne, civilisation antique la plus avancée en mathématiques, disposait d'un système de notation de nombres très performant en base soixante ; nous avons retrouvé des calculs de racines carrées extrêmement précises, à l'aide de l'algorithme appelé plus tard l'algorithme de Héron, mais nous n'avons retrouvé aucune trace de distinction entre rationnels et irrationnels. La seule distinction qui est faite est celle entre nombres qui s'expriment exactement en base 60 et nombres « qui n'existent pas », ou qui sont remplacés par une valeur approchée, sans donner d'explications.

La civilisation égyptienne en mathématiques est restée très dépendante d'un système de nombres peu adapté avec écriture des parties fractionnaires à l'aide de « fractions égyptiennes » de numérateur 1, système limité et peu performant.

La civilisation grecque est l'héritière en mathématiques de ces civilisations. Les grecs ont disposé d'un système de notation des entiers en base dix à l'aide des lettres de l'alphabet. Bien que limité sur le plan de l'écriture des grands nombres, ce système était utilisé pour la notation des nombres parallèlement à l'utilisation d'une abaque pour les opérations. Pour noter les parties fractionnaires, les grecs avaient recours, soit aux fractions égyptiennes, soit à l'utilisation des soixantièmes adaptée à leur notation avec des lettres. Puis plus tard une notation des fractions à l'aide de couples d'entiers est apparue. Tous les calculs pratiques étaient désignés sous le terme de *logistique* par les grecs et considérés comme une activité réservée aux artisans et aux marchands. La « partie noble » des activités numériques, concernant les réflexions sur la nature des nombres relevait de l'activité des mathématiciens et était désignée sous le nom d'*arithmétique*. Dans les textes de mathématiciens de l'époque classique la notion de nombre recouvre exactement celle de nombre entier naturel. Plus tard, à la fin de la période classique chez des mathématiciens comme Archimède, Héron et Diophante, la notion de nombre englobe aussi celle de fraction.

2.2 La découverte de l'irrationalité

Dans l'école pythagoricienne se sont développées les techniques de démonstration initiées par Thalès. Le nombre entier joue un rôle central dans la philosophie pythagoricienne : « Tout est nombre ». On n'a pas gradé de trace écrite de leur oeuvre, mais on sait que beaucoup de démonstrations en géométrie ont été faites dans cette école en supposant que deux longueurs quelconques étaient commensurables, c'est-à-dire que le rapport de deux longueurs se ramenait à un rapport de deux entiers.

La découverte de l'irrationalité, probablement à propos de la diagonale et du coté du carré bouleverse leur philosophie. On connait deux démonstrations de cette irrationalité. L'une d'elles est désignée par Aristote comme « la démonstration par le pair et l'impair », c'est-à-dire que si la diagonale était commensurable au coté on pourrait montrer qu'un même nombre est à la fois pair et impair. L'autre démonstration utilise une méthode appelée « antiphérèse », ou soustraction réciproque. Elle est essentiellement celle de l'algorithme d'Euclide appliquée à des longueurs. Elle distingue le cas commensurable où cet algorithme est fini et le cas incommensurable où cet algorithme ne s'arrête pas ; dès les origines, la notion d'irrationalité est donc associée à celle d'un processus infini.

2.3 La nature du continu, la nature de l'infini

À la fin du cinquième siècle avant notre ère, un débat sur la nature du continu divise différentes écoles philosophiques grecques. Une ligne est-elle indéfiniment divisible ou est-elle constituée de lignes insécables ? Même problème pour le temps, les aires et les volumes.

Contre les tenants des deux écoles, partisans des lignes insécables ou partisans du continu indéfiniment divisible, Zénon d'Élée a avancé quarante paradoxes dont quatre nous ont été conservés par Aristote. Ils mettent en question l'usage de l'infini et alimenteront les débats des philosophes pour longtemps.

Aristote a établi une théorisation de l'infini, théorie qui fera autorité pendant deux mille ans. Aristote applique à l'infini sa distinction entre l'existence en acte et l'existence en puissance. Il montre que le seul usage de l'infini dont a besoin le mathématicien est l'infini en puissance, ou infini potentiel, comme possibilité d'accroissement (par exemple que pour tout entier, on peut en trouver un plus grand), ou comme possibilité de division, (par exemple la possibilité de diviser toute longueur). Une grandeur n'est pas infinie en acte. *L'infini n'est pas ce en dehors de quoi il n'y a rien, mais au contraire ce en dehors de quoi il y a toujours quelque chose.* L'infini est donc associé à inachevé, indéterminé, et a une connotation négative. Toute la rigueur mathématique des grecs s'est exercée pour éliminer le recours à l'infini dans les raisonnements mathématiques.

Ceci a une grande importance pour notre propos. Si le rapport de deux grandeurs incommensurables ne peut être défini comme le rapport de deux entiers, comment le définir ? Nous avons gardé trace d'une première définition de ce rapport comme la suite infinie des quotients qui apparaissent dans le processus d'antiphérèse, définition inacceptable, si l'infini est à éviter en mathématiques. La solution sera trouvée par Eudoxe et exposée dans le livre cinq des Éléments d'Euclide qui traite des rapports de grandeurs.

3 La mesure des grandeurs chez les grecs

3.1 La mesure des grandeurs chez Euclide

Les grandeurs Le terme grandeur n'est nulle part défini dans Euclide. Par le contexte, nous comprenons qu'il s'agit de longueurs, d'aires, de volumes, d'angles, d'arcs de cercle, mais sans mettre derrière ces termes de notions numériques. Les seuls nombres utilisés sont les entiers. Le terme mesurer est employé dans le sens suivant : une grandeur en mesure une autre de même nature si la seconde est obtenue en juxtaposant un nombre entier de fois la première. L'opération associée est donc une opération de juxtaposition, de longueurs mises bout à bout, de surfaces planes, de volumes.

Critères d'égalité Un instrument indispensable est celui de critères d'égalité de grandeurs. Ceux-ci sont purement géométriques. Pour les segments, les angles et les arcs, il s'agit de la possibilité d'amener en coïncidence. Pour les triangles, les trois cas d'égalité montrent que l'égalité de trois éléments, cotés ou angles bien choisis, entraine l'égalité des trois autres éléments et *l'égalité des triangles*. On comprend que cette égalité de triangles désigne ce que nous appelons égalité des aires des triangles, (mais en utilisant ici une notion numérique qui n'existe pas chez Euclide), en lisant l'énoncé de la proposition 37 du livre 1 des Éléments d'Euclide : *Des triangles de même base et entre les mêmes parallèles sont égaux.* Cela montre que cette notion de *triangles égaux* est un correspondant purement géométrique de notre notion numérique d'égalité d'aires de triangles. Les égalités d'autres figures planes sont montré par des procédés de découpage. Des notions analogues sont aussi développées pour les volumes : exemple, les parallélépipèdes de même base entre les mêmes plans parallèles sont égaux.

Quadratures et cubatures Les problèmes de quadrature (respectivement cubature) désigne la construction à la règle et au compas d'un carré (respectivement un cube), égal à une surface donnée (respectivement un volume donné). Les plus célèbres de ces problèmes concernent le quadrature du cercle et la duplication du cube, problèmes qui ne trouveront leur solution qu'au dix-neuvième siècle où l'impossibilité de ces constructions sera montrée dans le cadre de la théorie des nombres.

La notion de quadrature au sens d'associer un nombre à une grandeur et une unité n'existe pas chez les grecs. On ne trouve donc dans Euclide *aucune formule de calcul d'aires ou de volumes*, bien que de nombreux problèmes de quadrature et de cubature soient traités. À titre d'illustration de ce point donnons le théorème de Pythagore qui figure à la fin du livre 1. Il est à comprendre ainsi : le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle peut être décomposé en deux rectangles « égaux » respectivement aux carrés construits sur les cotés de l'angle droit.

La méthode des aires Cette méthode consiste à passer, pour démontrer des égalités de lignes, par des égalités d'aires. Elle est abondamment utilisée par Euclide. De même, la démonstration d'égalité de rapports entre des lignes sera démontrée en utilisant des rapports entre des surfaces. Elle sera critiquée plus tard par des mathématiciens comme les mathématiciens de Port Royal comme ne respectant pas le *vrai ordre de la nature*, qui selon eux hiérarchise les grandeurs en longueurs, surfaces et volumes et demande de ne pas faire appel, contrairement à Euclide, à des surfaces pour démontrer des théorèmes sur des longueurs.

Les opérations sur les grandeurs Les opérations de juxtaposition portent sur des grandeurs de même nature dites homogènes par les grecs, et donnent un résultat de même nature. Cette juxtaposition n'est pas notée comme une addition. Par contre, on en déduit explicitement une multiplication des grandeurs par les entiers, obtenue en répétant l'opération de juxtaposition de grandeurs égales.

Une multiplication de grandeurs existe de façon limitée : Le produit de deux longueurs donne le rectangle construit sur ces deux longueurs. Le produit de trois longueurs donne le parallélépipède rectangle construit sur ces trois longueurs. Le produit de plus de trois longueurs n'a donc pas de sens. De même pour le produit de deux aires, ou d'une longueur et d'un volume, ou d'une aire et d'un volume, etc...

On désigne sous le nom d'algèbre géométrique grecque, toute une série de problèmes qui figurent dans le livre deux et le livre six des Éléments d'Euclide, qui sont exprimés et résolus géométriquement, et que nous pouvons associer maintenant à des identités remarquables, ou à des résolutions d'équations du second degré, portant sur des nombres, mais qui dans le livre grec n'ont rien de numérique.

3.2 La théorie des rapports de grandeurs d'Eudoxe Euclide

Les rapports de grandeurs dans le livre cinq des Éléments Les premières définitions du livre cinq portent sur les raisons (ou rapports) de grandeurs et sur les proportions (égalité de raisons). On ne peut établir de raison qu'entre deux grandeurs homogènes, (définition 3), qui de plus vérifient une propriété désignée maintenant sous le nom d'axiome d'Archimède (définition 4 : les grandeurs étant multipliées doivent se surpasser mutuellement, c'est à dire qu'on ne peut établir un rapport entre A et B que s'il existe deux entiers n et p tels que $nA > b$ et $pB > A$).

Une proportion est une identité de raisons, (définition 5). En notations modernes, la définition 6 donne un critère d'égalité de raisons : A est à B comme C est à D si, pour tous les entiers n et p possibles :

- Si $nA > pB$ alors $nC > pD$
- Si $nA = pB$ alors $nC = pD$
- Si $nA < pB$ alors $nC < pD$

La définition 6 est une définition opératoire, en ce sens qu'elle intervient effectivement dans les démonstrations, par exemple pour montrer que des triangles entre les mêmes paralléles sont entre eux comme leurs bases, proposition qui servira à établir le théorème que les manuels français désignent sous le nom de théorème de Thalès.

De même est définie une relation d'ordre entre les raisons. Dans la suite du livre cinq sont établies des relations sur les proportions ; il faut remarquer qu'on n'opère pratiquement pas sur ces raisons. Seule une composition (produit) limitée au carré d'un rapport (appelé rapport double, définition 10) et au cube d'un rapport (appelé rapport triple, définition 11) figure. Un seul théorème du livre six (proposition 18) utilise une composition de raisons, nulle part définie : *des parallélogrammes équiangles ont entre eux une raison composée de celles des cotés.*

Une lacune des Éléments concerne l'existence d'une quatrième proportionnelle à trois grandeurs, abondamment utilisée par Euclide pour des aires et des volumes dans le livre 12 et démontrée seulement dans le cas de longueurs.

La mesure des grandeurs et la méthode d'exhaustion Tous les théorèmes qui pour nous relèvent de la mesure des grandeurs, des aires et des volumes, seront exprimés dans le langage des proportions dans le livre 12. La pluspart de ces théorèmes se présenteront sous une forme analogue à celui ci : proposition 2, *les cercles sont entre eux comme le carré de leur diamètre.* La démonstration se fait par une double réduction à l'absurde, appelée plus tard *méthode d'exhaustion*. Pour montrer que $A/B = C/D$, on montre que $A/B > C/D$ est impossible et que $A/B < C/D$ est impossible ; on en déduit l'égalité des rapports. L'outil utilisé pour ces démonstrations par l'absurde est le théorème 1 du livre 10 qui dit que : *Deux grandeurs inégales étant proposées, si on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.*

La théorie des rapports de grandeurs fournit donc un procédé pour des démonstrations rigoureuses en géométrie. Elle restera la référence obligée pour deux mille ans. Elle est le seul moyen trouvé par les grecs pour traiter dans un cadre géométrique la question du rapport de grandeurs incommensurables.

3.3 Les approximations d'irrationnelles

Il importe de remarquer que le terme d'irrationnel désigne pour nous un nombre irrationnel. C'est pour cette raison que nous parlons d'irrationnelles pour indiquer que cette notion n'a chez les grecs rien de numérique et reste dans un cadre géométrique.

La théorie du rapport des grandeurs fut un instrument remarquable entre les mains d'Archimède pour démontrer rigoureusement des quadratures et des cubatures qu'il avait trouvées en utilisant des analogies mécaniques. En particulier il montra des encadrements célèbres du rapport de l'aire du cercle au carré du rayon. D'autres mathématiciens comme Héron, ont beaucoup développé les calculs de valeurs approchées de quantités irrationnelles.

Parallèlement cette théorie des rapports de grandeurs développée dans le livre cinq pour les grandeurs et dans les livres 7, 8, 9 d'arithmétique pour les rapports de nombres, fournit un développement de la logistique, en fournissant des théorèmes applicables aux fractions, ce qui explique l'élargissement de la notion de nombre aux fractions, à la fin de la période classique de la mathématique grecque.

3.4 Proclus, sur les rapports

Nous conclurons cette partie consacrée au problème de l'irrationalité dans la mathématique grecque par des citations de Proclus extraites du « commentaire sur le livre 1 des Éléments d'Euclide » (prologue page 51). Les calculs numériques développés ont posé la question : qu'est ce que ces rapports de nature géométrique que l'on peut encadrer, approcher par des nombres ?

Le fait que le rapport est toujours rationnel appartient à l'arithmétique seule, et pas entièrement à la géométrie, car il existe aussi des rapports irrationnels dans celle ci... là où il y a division à l'infini, il a y aussi l'irrationnel...

Quant aux théorèmes qui leur sont communs, l'un se transporte de la géométrie dans l'arithmétique, d'autres, au contraire de l'arithmétique dans la géométrie ; enfin d'autres, qui leur sont dévolus de la même manière par la mathématique toute entière, les intéressent toutes les deux. C'est en effet de cette manière que la permutation, les inversions, les compositions et les divisions de rapports sont communs aux deux sciences ; que l'arithmétique est la première à considérer les choses commensurables ; que la géométrie les considère après avoir pris l'arithmétique comme modèle, et établit par là même que les choses commensurables sont toutes celles qui ont entre elles le rapport d'un nombre à un nombre, parce que la commensurabilité existe primordialement dans les nombres. Car partout où il y a nombre il y a aussi du commensurable et partout où il y a du commensurable, il y a aussi du nombre.

4 Les apports des mathématiciens arabes

4.1 Réflexions sur la théorie des proportions

Nous savons que les mathématiciens arabes ont beaucoup travaillé sur le texte d'Euclide, en particulier sur la théorie des proportions et sur la théorie des parallèles. Nous avons un exemple avec le travail d'Omar Khayyam (1048-1123), où il cherche à définir l'égalité de deux rapports.

Étant (données) quatre grandeurs (telles que) la première soit égale à la seconde et la troisième égale à la quatrième, ou bien (telle que) la première soit une partie de la seconde, et la troisième cette même partie de la quatrième, ou bien (telle que) la première soit des parties de la seconde et la troisième ces mêmes parties de la quatrième, alors le rapport de la première à la seconde est nécessai-

rement comme le rapport de la troisième à la quatrième, et ce rapport est numérique.

Ce paragraphe énumère donc les cas suivants d'égalité de rapports :

– $A = B$ et $C = D$
– $A = B/n$ et $C = D/n$
– $A = pB/n$ et $C = pD/n$

pour conclure que dans ces cas $A/B = C/D$ (en langage moderne). Notons bien la conclusion : ce rapport est numérique.

Si les (grandeurs) ne sont pas selon ces trois formes et que, lorsqu'on retranche de la seconde tous les multiples de la première (contenus dans la seconde) jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la première, et si de la même manière, lorsqu'on retranche de la quatrième tous les multiples de la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la troisième, et que le nombre de multiples de la première contenu dans la seconde est égal au nombre de multiples de la troisième (contenu) dans la quatrième. Et si après (cela), on retranche (de la première) tous les multiples du résidu de la seconde par rapport à la première, de telle sorte qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la seconde, et que de la même (manière), on retranche (de la troisième) tous les multiples du résidu de la quatrième par rapport à la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la quatrième, et qu'alors le nombre de multiples du résidu de la seconde est égal au nombre de multiples du résidu de la quatrième ; ... Et si, lorsque de la même manière, on retranche tous les multiples des résidus successivement les uns des autres, comme nous l'avons montré, le nombre des résidus de la première et de la seconde est égal au nombre correspondant de la troisième et de la quatrième, (et ce) indéfiniment, alors le rapport de la première à la seconde sera, nécessairement, comme le rapport de la troisième à la quatrième. Et c'est cela le rapport véritable pour le type géométrique (des grandeurs).

Ce texte est extrait de la « Seconde Epître sur les proportions, de l'idée de proportionalité et de leur sens véritable ». (Traduction par Ahmed Djebbar).

On voit ici décrire en mots l'algorithme d'Euclide appliqué aux grandeurs ; la définition de l'égalité des rapports est donc donnée par l'égalité, à tous les stades des quotients. On voit opposer ce type de rapports aux précédents, comme rapports de type géométrique. C'est là la définition pré-Eudoxienne des rapports à l'aide de la suite des quotients dans le processus d'antiphérèse.

4.2 Développement de l'algèbre

Nous ne développerons pas ce point , mais l'invention de l'algèbre fut une contribution essentielle des arabes ; en désignant l'inconnue, par un mot « la chose », en utilisant son « carré », les arabes ont explicité la résolution de l'équation du second degré, en distinguant différents cas, puisqu'ils n'utilisaient que des coefficients positifs. Les algébristes italiens de la Renaissance ont résolu les équations du troisième et du quatrième degré. Parallèlement commence en Europe le développement du symbolisme algébrique dont l'unification sera très longue à réaliser. Cette algèbre et ses développements en Europe jouent aussi un rôle dans le développement de la notion de nombre réel, en amenant un calcul uniforme, que l'inconnue porte sur des nombres (rationnels) ou sur les grandeurs.

4.3 L'invention des décimaux

Cette invention faite à différentes époques par Al Samawal et par Al Kashi, en particulier, ne semble pas avoir joué un rôle important dans les mathématiques arabes. Pourtant, elle conduit à une graduation sur les nombres, graduation aussi fine qu'on veut, et permet des comparaisons entre nombres beaucoup plus facile que par l'usage des représentations fractionnaires. La redécouverte des décimaux en Europe à la fin du seizième siècle par Stevin, sera suivie de leur usage généralisé dans les tables de calculs en particulier les tables de logarithmes. Elle a une importance considérable pour l'unification du champ numérique.

5 Processus de numérisation des rapports

Nous allons indiquer très brièvement quelques étapes du long processus historique qui a conduit les mathématiciens à considérer les rapports géométriques comme des nombres.

5.1 Les opérations sur les rapports et les grandeurs

Oresme Le premier développement important sur la théorie des rapports est apporté par le travail d'Oresme écrit entre 1351 et 1360, intitulé : « De proportionibus proportionum ». Ce texte développe des opérations sur les rapports :

- ajouter, soustraire, diviser, augmenter, diminuer
- développement de la composition de rapports (produit), de rapports de rapports, étude du caractère rationnel ou non de rapports de rapports.
- l'affirmation que les rapports se comportent comme des grandeurs continues : entre deux rapports inégaux, il est possible d'insérer autant de moyennes que l'on voudra ; un rapport est divisible à l'infini.

Viète (1540-1603), écrit en 1591 « In artem analyticen Isagoge » décrit en mathématiques un nouvel art, l'analytique, (en fait l'algèbre), comme procédé de découverte de vérités mathématiques. Cette nouvelle algèbre est autant arithmétique que géométrique, et décrit une théorie générale des proportions. Il distingue la logistique numérique de la logistique spécieuse, (calculs sur les grandeurs et les nombres inconnus, les espèces). Des théories grecques, Viète conserve la loi des homogènes : on ne peut additionner et soustraire que des grandeurs homogènes. Le produit de deux grandeurs homogènes (ou non), donne une grandeur d'une autre dimension. De même la divison de grandeurs, est définie en référence à la notion grecque d'application d'une grandeur sur une autre. La hiérarchie des grandeurs ne se limite pas aux longueurs, aires et volumes, mais comporte des grandeurs de dimensions quelconques, 4, 5, 6 ... ainsi que Diophante l'avait déjà fait. Ce qui l'autorise à montrer que quatre grandeurs sont proportionnelles si et seulement si le produit des moyens est égal aux produit des extrêmes, et établit un lien entre l'écriture des équations et celle des proportions. Viète montre comment mettre en équation un problème, comment transformer cette équation pour passer à une forme canonique qui fournit la solution, comment exploiter numériquement ces résultats.

5.2 Représenter les grandeurs par des longueurs

Descartes « Les règles pour la direction de l'esprit » et la « géométrie » montrent les conceptions de Descartes sur l'algèbre, la géométrie et les mathématiques. Il recherche une mathématique universelle qui ne peut être représentée et conçue que symboliquement. L'algèbre est une théorie générale des proportions et des équations, dont les objets acquièrent d'abord leurs caractéristiques d'après le champ numérique, mais dont les objets symboliques s'identifient avec les objets du monde physique. Cette mathématique universelle identifie l'algèbre conçue comme logistique symbolique, avec la géométrie interprétée pour la première fois comme science symbolique.

Un des apports essentiels de Descartes est la rupture de la loi de l'homogénéité. Descartes montre que tous les résultats d'opérations sur les grandeurs, une fois choisie une unité de longueur, peuvent être représentés par des longueurs. Premier pas essentiel : les rapports géométriques, les produits, les aires, les volumes, peuvent être représentés par des longueurs. La demi-droite représente tous les résultats des calculs. Cette géométrie de Descartes est une *Algèbre des longueurs*.

Même s'il ne se prononce pas clairement, sur la nature du rapport géométrique, (est-il un nombre ou pas ?) ou plutôt, (à ma connaissance), même s'il maintient la distinction entre nombre et rapport géométrique, l'avancée sur le plan de la numérisation des rapports est importante.

5.3 Trouver une meilleure définition des rapports

Arnault Dans son traité de géométrie « Nouveaux élémens de géométrie », livre second sur la théorie des proportions, (1667), (page 23), Arnauld donne une nouvelle définition des rapports et des proportions, plus proche, comme le remarque R. Bkouche, de la pratique de la mesure que la définition euclidienne. Ici, contrairement au texte euclidien, la théorie des proportions se situe dans les chapitres préliminaires du cours de géométrie.

La manière dont une grandeur est contenue dans une autre que nous avons dite s'appeler raison, est encore de deux sortes. L'une est quand la grandeur, ou quelqu'une de ses aliquotes est contenue tant de fois précisément dans une autre, ce qui s'appelle raison exacte ou raison de nombre à nombre, parce que tous les nombres ont entr'eux cette raison ayant tous au moins l'unité pour l'une de leurs aliquotes qui est contenue précisément tant de fois dans tout autre nombre que ce soit.

Les grandeurs qui ont entr'elles ce type de raison de nombre à nombre sont appelées commensurables, parce qu'elles ont quelque aliquote qui leur sert de mesure commune. L'autre manière selon laquelle une grandeur est contenue dans une autre, est quand il ne se trouve aucune aliquote dans l'une qui soit précisément tant de fois dans l'autre. De sorte que l'une et l'autre ayant une infinité d'aliquotes et de mesures, il n'y en a aucune néanmoins qui mesure précisément l'une et l'autre grandeur, mais celle qui mesure précisément l'une ne mesurera jamais précisément la seconde, et celle qui mesurera précisément la seconde ne mesure jamais précisément la première. Cette raison s'appelle <u>sourde</u>. Et les grandeurs qui ont entr'elles ce type de raisons s'appellent ***incommensurables****, parce qu'elles n'ont entr'elles aucune commune mesure.*

Pour la définition d'une proportion, deux définitions sont nécessaires. la première concerne l'égalité des raisons de nombre à nombre.
Lorsque la raison d'un antécédent à son conséquent est égale à celle d'un autre antécédent à un autre conséquent, cette égalité de raisons s'appelle proportion.

Voici la seconde :
Deux raisons sont appelées égales quand toutes les aliquotes pareilles des antécédents sont chacunes également contenues dans chaque conséquent.
Que signifie cette deuxième définition, avec nos notations ? On aura $A/B = C/D$, si prenant des aliquotes pareilles des antécédents, c'est à dire ici partageant A et C par le même entier, on obtient que ces aliquotes sont chacune également contenues dans B et D, c'est à dire que $p.A/n < B < (p+1).A/n$ et $p.C/n < D < (p+1).C/n$. On voit que ce processus est le processus pratique de mesure, en utilisant des aliquotes des antécédents comme unités.

Les nouveaux éléments de géométrie d'Arnault deviendront une référence importante pendant plus d'un siècle.

5.4 Les rapports sont-ils des nombres ?

Stévin Indépendamment de son travail « La Disme » où il redécouvre les décimaux, Stevin (1548-1620) est intéressant par des prises de positions très modernes sur la nature des nombres et des grandeurs, en rupture totale avec la tradition. Ses thèses développées dans le « Traité des incommensurables grandeurs » (Arithmétique 1585) sont célèbres.

- *Que l'unité est nombre.*
- *Que nombres quelconques peuvent être nombres carrés, cubiques, de quatre quantités, etc.*
- *Qu'une racine quelconque est nombre.*
- *Qu'il n'y a aucuns nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables ou sourds.*

De nombreux mathématiciens participeront à ce type de discussion. Le nombre entier défini par Euclide comme multiplicité excluait l'unité par sa définition même. Le statut du zéro posait aussi problème. Pascal s'est aussi prononcé dans « De l'esprit géométrique » sur ce thème, démontrant que l'unité est un nombre mais que zéro n'en est pas un.

L'originalité de Stevin est manifeste par sa position sur les nombres et les grandeurs : « la communauté et la similitude entre grandeurs et nombres est si universelle qu'elles semblent quasi identité. » Les nombres sont pour lui une structure continue et non une structure discrète :« que nombre n'est point quantité discontinue ». Il distingue nombre arithmétique (sans adjectif de grandeur) et nombre géométrique, mais tout est dénommé nombre.

Cette position ne pouvait pas être justifiée et relevait d'une prise de position, d'un acte de foi qui fut violemment combattu par les mathématiciens de Port-Royal, en particulier. Elle ne pouvait pas convaincre celui qui restait dans le cadre de pensée euclidien.

Newton Dans son livre publié en 1707 « Arithmétique universelle », Newton répond sans aucune ambiguïté par l'affirmative :

On entend par nombre, moins une collection de plusieurs unités, qu'un rapport abstrait d'une quantité quelconque à une autre de même espèce, qu'on regarde comme l'unité. Le nombre est de trois espèces, l'entier, le fractionnaire, et le sourd. L'entier est mesuré par l'unité ; le fractionnaire par un sous-multiple de l'unité ; le sourd est incommensurable avec l'unité.

D'Alembert L'article de L'encyclopédie Diderot D'Alembert donne à l'article nombre une définition juxtaposant des points de vue contradictoires : multiplicité d'unités dans le premier paragraphe, rapport abstrait d'une quantité à une autre selon Newton au second, dans le troisième paragraphe, selon la définition de Wolf,ce qui a le même rapport avec l'unité qu'une ligne droite avec une autre ligne droite, avec un retour dans la suite de l'article à la notion euclidienne de multiplicité d'unités.

Pour comprendre, il est intéressant de se reporter aux « Essais sur les éléments de la philosophie naturelle », de D'Alembert (1759), (page 328), où il développe longuement son point de vue.

...le mot mesure en mathématiques, renferme l'idée d'un rapport explicitement exprimé. Or il est des rapports qui offrent plus de difficultés que les autres, soit pour en présenter la notion d'une manière bien nette, soit pour les démontrer de manière rigoureuse : ce sont les rapports des quantités incommensurables.

On dit par exemple, que la diagonale du carré est à son coté comme la racine carrée de 2 est à 1 ; pour avoir une idée bien nette de la vérité que cette proposition exprime, il faut d'abord remarquer, qu'il n'y a point de racine carrée du nombre 2, ni par conséquent de rapport proprement dit entre cette racine et l'unité, ni par conséquent de rapport proprement dit entre la diagonale et le coté d'un carré, ni par conséquent enfin, d'égalité entre ces rapports, puisqu'il n'y a point proprement d'égalité entre des rapports qui n'existent pas. Mais il faut remarquer en même temps, que si on ne peut trouver un nombre qui multiplié par lui même produise 2, on peut trouver des nombres qui multipliés par eux même produisent un nombre aussi approchant de 2 qu'on voudra, soit en dessus, soit au dessous....

Cette facilité qu'on a de représenter des rapports incommensurables, non par des nombres exacts, mais par des nombres qui en approchent aussi près qu'on voudra, sans jamais exprimer rigoureusement ces rapports, est cause que les mathématiciens aient étendu la dénomination de nombre aux rapports incommensurables, quoiqu'elle ne leur appartienne qu'improprement, puisque les mots de nombre et nombrer supposent une désignation exacte et précise, dont ces sortes de rapports ne sont pas susceptibles. Aussi n'y a-t-il à proprement parler que deux sortes de nombres, les nombres entiers et les nombres rompus ou fractions....

De là il est aisé de voir, que si les rapports incommensurables sont regardés comme des nombres, c'est par la raison que s'ils ne sont pas des nombres proprement dits, il ne s'en faut de rien, pour ainsi dire, qu'ils n'en soient réellement, puisque la différence d'un rapport incommensurable à un nombre proprement dit, peut être aussi petite qu'on voudra.

Legendre La pratique de Legendre est claire. Dans son livre « Élémens de géométrie » paru pour la première fois en 1794, il développe le *vrai sens des proportions* au livre 3.

Si on a la proportion $A : B :: C : D$, on sait que le produit des extrêmes $A.D$ est égal au produit des moyens $B.C$.

Cette vérité est incontestable pour les nombres ; elle l'est aussi pour des grandeurs quelconques, pourvu qu'elles s'expriment, ou qu'on les imagine exprimées en nombres ; et c'est ce qu'on peut toujours supposer : par exemple, si A, B, C, D *sont des lignes, on peut imaginer qu'une de ces quatre lignes ou une cinquième, serve à toutes de commune mesure et soit prise pour unité ; alors,* A, B, C, D *représentent chacune un certain nombre d'unités, entier ou rompu, commensurable ou incommensurable, et la proportion entre les lignes* A, B, C, D *devient une proportion de nombres.*

5.5 Argand et les rapport de grandeurs dirigées

On sait que les nombres négatifs et les nombres imaginaires, en usage depuis la Renaissance, ont posé aux mathématiciens des problèmes redoutables. En voulant étendre à ces nombres ou quantités toutes les règles valables pour les nombres entiers ou fractionnaires, des contradictions sont apparues : difficultés avec les inégalités et la justification de la règle des signes pour les négatifs, difficultés avec les logarithmes des nombres complexes. Le problème de la justification de l'usage de ces quantités s'est trouvé posé jusqu'au début du dix neuvième siècle. Deux sortes de théories furent élaborées : une de nature géométrique par un certain nombre de mathématiciens peu connus comme Argand, Warren, Mourrey consiste à étendre aux grandeurs dirigées la théorie des proportions, en associant à l'idée de rapport une combinaison de l'idée de rapport de grandeurs et de l'idée d'angle ; l'autre, ou les autres théories, élaborées par des mathématiciens plus connus, Gauss, Hamilton, Cauchy, sont des justifications de nature algébrique.

La dernière extension de la théorie des proportions voit donc le jour quelques décennies avant le moment où, par la découverte des géométries non euclidiennes, les mathématiciens prennent conscience que les fondements des mathématiques ne peuvent être assurés en prenant comme base la vérité de la géométrie euclidienne. Le problème des fondements de l'analyse est posé. Dans ce processus, la théorie des proportions va être abandonnée au profit d'une construction des nombres réels à partir des nombres rationnels.

5.6 L'arithmétisation de l'analyse

Après une longue période de développement où les résultats obtenus dans les divers secteurs de la mécanique et de la physique suffisaient à montrer le bien fondé des méthodes employées en analyse, avec Cauchy en particulier le souci de fonder l'analyse sur des bases rigoureuses devint une préoccupation importante, en particulier pour les besoins de l'enseignement.

Bolzano vers 1817 se livre à une critique des démonstrations géométriques employées pour démontrer un théorème comme le théorème des valeurs intermédiaires, *qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode qui consiste à vouloir déduire des vérités des mathématiques pures (ou générales) (c'est à dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse), des considérations qui appartiennent à une partie appliquée (ou spéciale) seule, à savoir la géométrie.* Il rejette de même le recours à des considérations de mouvement ou de temps.

De nombreux mathématiciens se sont à cette époque efforcés de justifier les théorèmes fondamentaux de l'analyse, en démontrant d'abord les propriétés des nombres, ou plutôt en faisant une construction explicite de ces nombres à partir des nombres rationnels supposés connus à ce premier stade.

Nous n'allons pas ici décrire les différents modes de constructions des réels à partir des rationnels, ce qui pour moi, fait l'objet d'un travail suivant. Mon but dans cet article était simplement de montrer que les nombres réels ont posé question dans l'histoire. Ces questions, dans les termes mêmes où des mathématiciens se les ont posées, sont intéressantes, car on se doute que les étudiants peuvent se les poser à peu près dans les mêmes termes.

6 Que faire dans l'enseignement ?

Si les constructions des nombres réels ont été abandonnées en début de premier cycle universitaire, c'est qu'effectivement, elles ne pouvaient plus passer. Impossible de définir les réels par des suites de Cauchy, à des étudiants qui ont un mal fou à s'habituer aux raisonnements avec les ϵ η. La construction par les coupures serait possible si les étudiants avaient l'habitude de raisonnements de plus de deux lignes...

Il est sûr que dans la situation actuelle, il faut renforcer la formation des maitres sur cette question car le dilemme est le suivant : Nous devons au cours des études secondaires développer chez les élèves une intuition juste des nombres, en étant dans l'impossibilité d'apporter des justifications complètes. Si le maitre est suffisamment formé, s'il a des idées claires sur cette question, à chaque étape il peut faire progresser les élèves. Mais que peut faire un maitre qui a des idées floues ou carrément fausses, comme certains étudiants de Capes que je vois tous les ans. Il ne peut que reproduire cette confusion au niveau de ses élèves.

Que penser de l'enseignement de l'analyse où on fait converger des suites vers des choses qu'on n'a pas définies comme $\sqrt{2}$ ou qu'on ne peut qu'approcher ? Comment, quand l'enseignement est ainsi incohérent, faire autre chose en analyse que passer d'une activité à l'autre, sans trop savoir ce qu'on fait, ni pourquoi on le fait ? Nous constatons toujours que l'idée principale sur les suites des étudiants de première année de Deug en arrivant à l'université, est que c'est très dur et qu'ils n'y comprennent rien. Quant à la définition des limites, il faut commencer à corriger celle utilisée dans les programmes.

Nous pensons à l'Irem de Lille que pour sortir de cette situation, il faudrait que les Irem développent un travail de réflexion vertical sur différentes notions, aux cours des cycles primaire, collège, lycée, et enseignement supérieur. La question de l'enseignement des nombres est une de ces questions, qui rejoint la question de l'enseignement de l'analyse, objet de malaise pour la plupart des enseignants de terminale que je connais. Cet enseignement doit être repensé en tenant compte de l'usage actuel des calculatrices, mais sans escamoter comme actuellement toute question théorique. Quel est le sens d'un calcul exact, d'un calcul approché ? La conception des nombres réels, de la mesure des grandeurs, de l'enseignement de l'analyse est le résultat d'un processus historique, dont nous devons tenir compte. Comment rétablir une cohérence entre le numérique et le géométrique, entre le numérique et l'analyse dans l'enseignement ? Il est nécessaire de s'engager dans un processus de réflexion qui mette l'accent sur la cohérence verticale des apprentissages.

Bibliographie

Abdeljaouad, *Vers une épistémologie des décimaux,* APM, Fragments d'histoire des Mathématiques.

Arnauld *Nouveaux élémens de géométrie,* Paris 1967

Baccou Robert, *Histoire de la science grecque. De Thalès à Socrate,* Aubier Editions, 1951.

Bkouche, *Autour du théorème de Thalès,* Irem de Lille, 1994.

Boyer, *A history of Mathematics,* Princeton University Press, 1968.

Cajori, *A history of mathematical notations,* 2 tomes, The Open Court Publishing Company, Chicago, London, 1928.

Collette Jean-Paul, *Histoire des Mathématiques,* 2 tomes, Vuibert, 1979.

Cousquer Éliane, *Histoire du concept de nombre,* Irem de Lille, avril 1992.

Dahan-Dalmedico Amy et Peiffer Jeanne, *Histoire des Mathématiques, Routes et dédales,* Sciences axes, Études vivantes, Paris Montréal, 1982. (réédité points sciences)

D'Alembert *Essai sur les éléments de philosophie,* Fayard

Dedekind Richard, *Essays on the theory of numbers,* Dover, 1963.

Dedron Pierre, Itard Jean, *Mathématiques et mathématiciens,* Magnard, 1972.

Descartes *La géométrie, 1637* dans *Le discours de la méthode,* Fayard Paris 1986 et *Règles pour la direction de l'esprit.*

Dhombres Jean, *Nombre, mesure et continu — épistémologie et histoire,* Cedic Fernand Nathan, 1978.

Djebbar Ahmed, *Les Mathématiques arabes et leur environnement,* Actes de l'université d'été sur l'histoire des Mathématiques, Université du Maine 6–13 Juillet 1984.

Djebbar A., *Enseignement et recherches mathématiques dans le Maghreb des treizième et quatorzième siècles*, Publications mathématiques d'Orsay 81-02.

Euclide, *Les Eléments, (deux tomes, traduction F.Peyrard),* A.Blanchard.

Euclid, *The thirteen books of Elements, (3 vol, translation by T.Heath),* Dover.

Gaud et Guichard, *Les nombres relatifs : Histoire et enseignement,* Repères-IREM Janvier 1991.

Gilling, *Mathematics in the time of pharaons,* The MIT Press, London, 1972.

Guitel Geneviève, *Histoire comparée des numérations écrites,* IREM, Université du Maine.

Guillemot Michel, *De l'arithmétique égyptienne à l'arithmétique arabo-islamique,* Colloque maghrébin sur l'histoire des Mathématiques arabes, Tunis, 1988.

Guillemot Michel, *Les notations et les pratiques opératoires permettent-elles de parler de fractions égyptiennes,* à paraître.

Heath, *History of greak geometry,* 2 vol, Dover.

Ifrah G., *Histoire universelle des chiffres,* R.Laffont, 1994.

IREM *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques,* Ellipses.

Dhombres, Dahan, Bkouche, Houzel et Guillemot, *Mathématiques au fil des âges,* Gauthier Villars, Bordas, Paris, 1987.

Groupe inter IREM, *Histoire et épistémologie des Mathématiques, La rigueur et le calcul,* Cedic, 1982.

Jacob Klein, *Greek mathematical thought and the origin of algebra,* Dover.

Kline Morris, *Mathematical throught from ancient to modern times,* Oxford University Press, New York, 1972.

Kline Morris, *Mathématiques : la fin des certitudes,* Christian Bourgois.

Lebesgue H. *La mesure des grandeurs,* A. Blanchard.1975.

Lloyd Geoffrey, *Les débuts de la science grecque, de Thalès à Aristote,* Maspero, 1974.

Lubet J.P. *De proportionibus proportionum de N. Oresme.* Irem de Lille

Neugebauer O., *The exact sciences in Antiquity,* Dover, 1957.

Noel, *Le matin des mathématiciens, Entretiens sur l'histoire des Mathématiques,* présentés par Emile Noel, Belin, 1990.

Popp Walter, *History of Mathematics, Topics for school,* The open University Press, 1978.

Proclus de lycie *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide,* Desclées de Brouwer 1948.

Resnikoff H.L. et Wells Ro Jr., *Mathematics in civilization,* Dover publications inc. New York, 1984.

Rutten Marguerite, *La Science des Chaldéens,* Que Sais-je, (893), PUF, 1970.

George Sarton, *Ancient science through the golden age of Greece,* Dover.

Serres Michel, *Éléments d'histoire des Sciences,* Bordas, 1989.

Smith, *A source book in Mathematics,* Dover Pub. New York, 1959.

Struik Y., *A concise history of Mathematics,* Dover Pub. New York, 1967.

Courrier de l'Unesco, *Naissances des nombres : comptes et légendes,* Novembre 1993.

Vauzelard *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète, précédée de Introduction à l'art analytique,* Corpus des oeuvres de philosophie en langue française. Fayard

Van der Waerden B.L., *Science awakening, Egyptian, Babylonian and Greek Mathematics,* Science Editions, 1963, John Wiley, New York.

Youschkevitch A. P., *Les Mathématiques arabes du huitième au quinzième siècle,* Vrin, Paris, 1976.